

Der Satz des Pythagoras

(von H. Tiex)

Der Satz des Pythagoras kann zu Recht als einer der berühmtesten mathematischen Sachverhalte gelten. Er besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Länge der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden Katheten ist. Er gehört zu den wichtigsten obligatorischen Lerninhalten des Mathematikunterrichtes der Mittelstufe und begleitet die Schülerinnen und Schüler auch durch die Oberstufe. Seine Entdeckung bzw. sein Beweis werden häufig als die wichtigste Leistung des Pythagoras angesehen (vgl. z. B. Fokus Mathematik 9 NRW von 2009, S. 95). Dieser Sachverhalt soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Die alten Babylonier und Ägypter

Der Satz des Pythagoras war schon lange vor Pythagoras Lebenszeit bekannt. Seine Verwendung lässt sich in Mesopotamien bei den alten Babyloniern schon in der ersten Hälfte des zweiten Jahrtausends v. Chr. nachweisen. In Mesopotamien scheint man keine abstrakte von konkreten Beispielen losgelöste Formulierung mathematischer Gesetze oder formale mathematische Beweise gekannt zu haben; es sind lediglich viele mit Keilschrift beschriftete Tontafeln erhalten geblieben, die umfangreiche Listen konkreter mathematischer Aufgaben inklusive ihrer Lösung enthalten, welche vermutlich als Muster- und Beispielaufgaben dem Unterricht in Schreiberschulen dienten. Daher findet sich in Mesopotamien an keiner Stelle eine

ausdrückliche Formulierung des Satzes des Pythagoras, aber auf den Tontafeln gibt es eine Reihe von Aufgaben, bei deren Lösung er verwendet wurde. Er wurde zum Beispiel für die Berechnung von Diagonalen in Rechtecken benutzt. Die Schreiber nutzten dabei aus, dass in einem Rechteck mit den Kantenlängen a und b die Länge der Diagonale d ausgerechnet werden kann mit der Gleichung $d^2 = a^2 + b^2$. Verschiedene Tontafeln verwenden den Satz aber auch in anderen Zusammenhängen. Dazu gehört vermutlich auch die Tontafel Plimpton 322, auf der sich 15 pythagoräische Zahlentripel (also natürliche Zahlen a , b und c mit $a^2 + b^2 = c^2$) erkennen lassen. Die Werte für b und c werden in der von links gezählt zweiten und dritten Spalte der Tafel aufgelistet. Statt der Zahl a findet sich allerdings in der ersten Spalte der Wert für a^2/c^2 . Warum sich dieser Wert dort befindet ist umstritten. Links von der ersten Spalte ist die Tafel abgebrochen, dort befand sich vermutlich einst eine heute nicht mehr vorhandene weitere Spalte, in der ebenfalls Werte aufgelistet waren. Unter den benutzten Tripeln befinden sich zum Teil auch sehr große Werte wie zum Beispiel (120, 119, 169) und (4800, 4601, 6649); dies spricht dafür, dass komplexere Formeln bzw. „Rechenrezepte“ zur Ermittlung der Zahlen benutzt worden sind. Der Satz des Pythagoras könnte dabei eine Rolle gespielt haben.

Wie im alten Mesopotamien scheint man auch im alten Ägypten keine von konkreten Rechnungen losgelösten mathematischen Regeln oder Beweise gekannt zu haben. Die ägyptische Mathematik lässt sich mit mehreren Papyri rekonstruieren, welche eine größere Zahl von Aufgaben enthalten. Die erhalten gebliebenen Aufgaben lassen keinen Rückschluss darauf zu, dass die Ägypter den Satz des Pythagoras gekannt hätten. Es gibt allerdings Hinweise darauf, dass der mit dem Satz des Pythagoras verbundene Sachverhalt nicht gänzlich unbekannt war. So entdeckte man im Papyrus



Kahun (ca. 1800 v. Chr.) pythagoräische Zahlentripel, die alle Vielfache des einfachsten Tripels (3,4,5) sind. Eine Verbindung dieser Werte zu den Seitenlängen eines Dreiecks oder Vierecks fehlt allerdings.

Die alten Griechen

Ab etwa dem siebten Jahrhundert v. Chr. erlebte das antike Griechenland einen kulturellen Aufschwung. Um etwa 600 v. Chr. wird Thales von Milet zum ersten bedeutenden Mathematiker der griechischen Geschichte. Im Rahmen dieses Aufschwungs taucht auch der Satz des Pythagoras im alten Griechenland auf. Er könnte entweder aus Mesopotamien übernommen worden sein oder unabhängig vom Nahen Osten von den Griechen selbst entdeckt worden sein. Der Zeitpunkt der Übernahme bzw. Entdeckung ist unbekannt, muss aber spätestens im fünften vorchristlichen Jahrhundert liegen, da sein Inhalt dem Mathematiker Hippokrates von Chios bekannt gewesen ist. Dieser wirkte in der Mitte des fünften vorchristlichen Jahrhunderts. Man kann nicht ausschließen, dass die frühen Pythagoräer oder sogar Pythagoras selbst irgendwie an der Übernahme bzw. der Entdeckung beteiligt waren. Dies ist aber nicht nachweisbar und stößt auf das Problem, dass der Satz erst Jahrhunderte später mit Pythagoras (oder dem Pythagoräismus) verbunden wird. Die Entdeckung des Satzes wird in den ersten Jahrhunderten mit keinem bestimmten Mathematiker verbunden.

Pythagoras und sein Satz

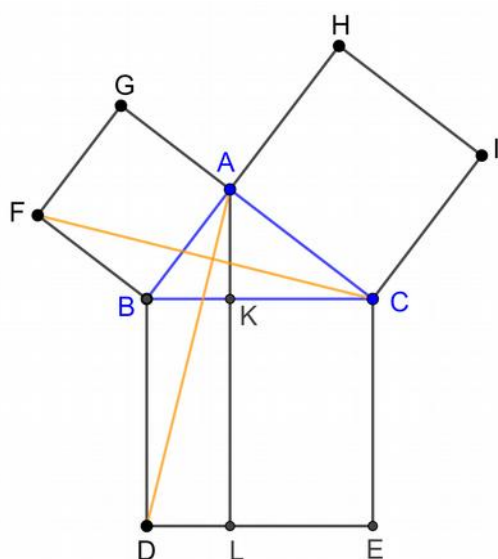
Pythagoras wird in den Quellen erst seit dem ersten vorchristlichen Jahrhundert als Entdecker „seines“ Satzes bezeichnet. Eines der frühesten diesbezüglichen Zeugnisse findet sich im Werk „Über die Architektur“ von Vitruv (ca. 15. v. Chr.), in dem berichtet wird, Pythagoras habe entdeckt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 die Quadrate der

kürzeren Seiten das Quadrat der längeren Seite ergeben. Zu Ehren der Musen (die ihm angeblich seiner Ansicht nach diese Erkenntnis geschenkt hatten) habe er anschließend ein Tieropfer dargebracht. Noch älter ist möglicherweise die ab etwa 100 n. Chr. von verschiedenen Autoren zitierte Aussage eines Mannes namens Apollodoros, Pythagoras habe eine bedeutende Zeichnung entdeckt und daraufhin einen Ochsen geopfert. Allerdings ist unklar, welche Zeichnung damit gemeint ist, wann die Aussage genau entstand und wer Apollodoros überhaupt ist. Die Verbindung des Pythagoras zu „seinem“ Satz taucht also erst relativ spät auf. Trotzdem setzte sich im ersten nachchristlichen Jahrhundert allgemein die Vorstellung durch, Pythagoras habe „seinen“ Satz allgemein für alle Dreiecke entdeckt und anschließend ein Opfer dargebracht. Diese Geschichte findet sich in verschiedenen Versionen bei vielen Autoren.

Der Beweis des Euklid

Um 300 v. Chr. sammelte der Mathematiker Euklid einen großen Teil des mathematischen Wissens seiner Zeit in seinem Werk „Elemente“. Er erwähnt dabei auch den Satz des Pythagoras, ohne ihn dabei allerdings irgendwie mit Pythagoras oder den Pythagoräern zu verbinden. Euklids Werk enthält die beiden ältesten bekannten Beweise des Satzes. Beim ersten (Euklid I 47) betrachtet er ein rechtwinkliges Dreieck ABC und errichtet über allen Seiten Quadrate. Anschließend zeichnet er parallel zu BC und CE die Strecke AL und die Verbindungen von F nach C und von A nach D ein. Dann stellt er zunächst fest, dass die Dreiecke DAB und BCF kongruent sind, da die Seiten BD und BC bzw. BA und BF gleich lang sind und beide bei B denselben Winkel haben. Darauf aufbauend schlussfolgert er, dass auch die Rechtecke DLKB und BAGF gleich groß sind (da sie jeweils eine





Skizze für Euklids ersten Beweis des Satzes des Pythagoras. Eine ähnliche Skizze taucht auch in den „Elementen“ auf

Seite und die dazu gehörende Höhe mit den eben genannten Dreiecken gemeinsam haben). Analog leitet er her, dass auch die Rechtecke ECKL und CIHA gleich groß sind. Daraus folgt schließlich, dass die Fläche der Quadrate über den Katheten gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse ist und damit der Satz des Pythagoras. Beim zweiten (Euklid VI 31) beweist er eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras (Im rechtwinkligen Dreieck ist die gradlinige Figur über der Hypotenuse gleich den ähnlichen und ähnlich errichteten Figuren über den Katheten zusammen) mit Hilfe des Prinzips der Ähnlichkeit. Von wem diese Beweise ursprünglich stammen ist unklar. Es gibt keinen Hinweis darauf, dass Pythagoras einen Beweis „seines“ Satzes formuliert hätte.

Ergebnis

Insgesamt betrachtet muss also festgestellt werden, dass völlig unklar ist, ob Pythagoras den nach ihm benannten Satz wirklich „entdeckt“ oder gar bewiesen hat. Das kann einerseits nicht ausgeschlossen werden. Aber andererseits spricht dagegen, dass er erst relativ spät mit der

Entdeckung seines Satzes verbunden wird. Insbesondere lässt sich den antiken Zeugnissen nicht unbedingt entnehmen, dass ihre Autoren davon ausgingen, dass er ihn bewiesen hätte. Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob man nicht vielmehr die alten Babylonier als die eigentlichen Entdecker des Satzes ansehen sollte. Pythagoras wiederum hat ihn bestenfalls Jahrhunderte später ein weiteres Mal entdeckt.

Fortsetzung folgt ...

Quellen (in Auswahl)

C. Thaer (Hrsg.): Die Elemente von Euklid, Frankfurt am Main 2010 (Nachdruck der vierten Auflage von 2003).

I. Thomas (Hrsg.): Selections illustrating the history of Greek Mathematics, Band 1: From Thales to Euclid, London 1957³. (Loeb Classical Library)

Literatur (in Auswahl)

D. Herrmann: Die antike Mathematik. Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen, Berlin u. Heidelberg 2014

D. Herrmann: Mathematik im Vorderen Orient. Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien, Berlin 2019.

R. Kaplan und E. Kaplan: Hidden Harmonies. The Lives and Times of the Pythagorean Theorem, New York u. a. 2013.

E. Maor: The Pythagorean theorem. A 4000-year History, Princeton u. Oxford 2007.

A. Martinez: The Cult of Pythagoras. Math and Myths, Pittsburgh 2012.





A. Pichot: Die Geburt der Wissenschaft. Von den Babyloniern zu den frühen Griechen, Köln 2000 (französisches Original Paris 1991).

Bildnachweis

Die Skizze zu Euklids Beweis wurde vom Autor mit Hilfe von Geogebra selbst angefertigt.

Autor

Helmut Tiex (Moderator im Mathe-Treff der Bezirksregierung Düsseldorf)

